ESSEC
ÉCOLE SUPÉRIEURE DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ET COMMERCIALES
Etablissement Privé d'Enseignement Supérieur Reconnu par l'Etat

CONCOURS D'ADMISSION DE 1978

MATHEMATIQUES - 1ère épreuve (4 h)

Des points de présentation participent au barème. Toute composition confuse et qui ne démarque pas explicitement les différents paragraphes sera pénalisée.

I - 1°) V(x) étant un polynôme à coefficients complexes que dire du polynôme

$$W(x) = \frac{1}{3}\,(V(x) + V(jx) + V(j^2x)) \qquad \text{où} \quad j = e^{\frac{2i\pi}{3}} \ ?$$

2°) Au polynôme $Q(x) = 2(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ on associe le polynôme T(x)

$$T(x) = Q(x).Q(jx).Q(j^2x)$$

Montrer que T est un polynôme en x^3 ; on pose $T(x) = H(x^3) = H(X)$. Préciser les racines de H(X). Expliciter H(X). Généraliser.

II - Dans ce paragraphe seules seront prises en considération les réponses explicitées à l'aide d'un dessin ; sauf mention du contraire a et b sont deux nombres respectivement complexe et réel.

1°) Pour b donné strictement positif trouver le lieu de a défini par :

$$|a+2b| \leq 1 \quad \text{et} \quad |a-b| \leq 1.$$

Résumer clairement les cas particuliers suivants :

a) $|a+2b| = 1$ et $|a-b| \leq 1$,
b) $|a+2b| \leq 1$ et $|a-b| = 1$,
c) $|a+2b| < 1$ et $|a-b| < 1$.

2°) Quel est quand b réel varie le lieu de a défini par :

$$|a+2b| = 1 \quad \text{et} \quad |a-b| = 1 \ ; \ \text{(module de } a-b = 1).$$

3°) b étant maintenant un nombre complexe donné trouver le lieu de a défini par $|a+2b| \leq 1$ et $|a-b| \leq 1$ quelle région du plan décrit alors b pour que le problème soit possible ?

Dans la suite de ce problème, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ est repéré par sa base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ et $\vec{e}_3 = (0,0,1)$. Tout endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ peut ainsi être caractérisé par la matrice qui le repère dans la base canonique ; les matrices seront donc des matrices carrées, d'ordre 3, à éléments réels ou complexes. Un nombre complexe

.../...

a représentera indifféremment la matrice scalaire $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ou l'endomorphisme qu'elle repère ; donc 1 désigne indifféremment l'application identique ou la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

III - Nous disons qu'une suite M_n de matrices tend vers une matrice limite L et nous écrivons $M_n \to L$ si et seulement si le terme général de position p,q de la matrice M_n tend vers le terme de même position de la matrice L quand n tend vers l'infini Les grandes lettres de ce paragraphe représentent des matrices.

1°) Montrer que si $M_n \to L$ et $M'_n \to L'$ alors $M_n + M'_n \to L + L'$.

2°) Montrer que si $M_n \to L$ et $M'_n \to L'$ alors $M_n.M'_n \to L.L'$.

3°) Montrer que si $M_n \to 0$ alors $1 + M_n$ a un déterminant qui tend vers 1.

4°) Montrer que si $A^n \to 0$ alors la matrice 1-A est inversible.

5°) Montrer que si x_n est une suite de complexes telle que $x_n \to x_o$ alors $x_n.A \to x_o.A$

IV - Soient deux endomorphismes u_1 et u_2 de $\mathbb{C}^3$ tels que :

(π) $$u_1+u_2 = 1, \quad u_1 \circ u_2 = 0, \quad u_1 \neq 0, \quad \text{rg } u_1 \leq \text{rg } u_2 ,$$

où rg u_1 par exemple désigne le rang de u_1 c'est-à-dire la dimension de Im $u_1 = u_1(\mathbb{C}^3)$.

1°) a) A-t-on $u_2 = 0$? Montrer que u_2 n'est pas bijectif.

b) Montrer que u_1 et u_2 sont linéairement indépendants.

c) Montrer que Im u_1 et Im u_2 sont supplémentaires.

d) Préciser les rangs de u_1 et u_2.

2°) Soient deux complexes α_1 et α_2 non simultanément nuls. On considère l'endomorphisme u défini par

$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$; u_1 et u_2 vérifiant toujours les conditions (π).

a) Expliciter $(u-\alpha_1) \circ u_1$, $(u-\alpha_2) \circ u_2$.

(m) b) A-t-on $(u-\alpha_1) \circ (u-\alpha_2) = 0$?

3°) v étant un endomorphisme <u>non</u> scalaire de $\mathbb{C}^3$; on aimerait résoudre en α_1, α_2, u_1 et u_2 l'équation définie par $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ où α_1 et α_2 sont deux complexes et u_1 et u_2 deux endomorphismes vérifiant (π).

a) Caractériser v pour que le problème soit possible et montrer qu'alors il n'admet qu'une solution.

.../...

b) Application. On désigne par A_1 et A_2 les matrices associées à u_1 et u_2. Résoudre le problème posé en 3°) pour v donné par sa matrice associée dans les quatre cas suivants :

① : $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, ② : $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ③ : $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, ④ : $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V - Reprenons $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1°) Comment choisir a et b pour que $A^n \to 0$?

2°) Montrer qu'alors la suite de matrices définie pour $1 \leqslant n$ et entier par

$$B_n = 1 + A + A^2 + \ldots + A^n \text{ converge ; calculer sa limite.}$$

3°) Résoudre en A l'équation $A^3 = 1$.

4°) Peut-on avoir $A^3 = A_1$?

VI - Toujours pour $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; calculer $(jK-1)(j^2K-1)$ et $(K-1)(K-j)(K-j^2)$.

On considère les matrices $P(K) = \frac{1}{3}(1+K+K^2)$, $P_2 = P(j^2K)$, $P_3 = P(jK)$ et P_2+P_3.

1°) Montrer que deux de ces matrices ont déjà été identifiées antérieurement.

2°) Préciser les produits deux à deux des trois matrices A_1, P_2 et P_3.

a) Soit X l'espace vectoriel engendré par A_1, P_2 et P_3 ; montrer qu'il est multiplicativement stable.

b) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ appartient-elle à X ?

c) On pose $M = M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$; décomposer M sur A_1, P_2, P_3.

3°) Soit $D(a,b,c) = M(a,b,c) \cdot M(a,bj,cj^2) \cdot M(a,bj^2,cj)$, l'expliciter, si possible sans calcul.

4°) Soit $S = M(a,b,c)$ telle que : $a+b+c = j$, $a+bj+cj^2 = j^2$, $a+bj^2+cj = 1$. Donner le déterminant de S et montrer que lorsque k parcourt N les matrices S^k forment un ensemble fini dont on précisera le nombre d'éléments.

5°) Même question en prenant maintenant :

$a+b+c = \theta^p$, $a+bj+cj^2 = \theta^q$, $a+bj^2+cj = \theta^r$ où $\theta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ et p,q,r sont trois entiers appartenant à l'ensemble $\{1,2,3,\ldots,n\}$.

Application. $n = 180$, $p = 30$, $q = 24$ et $r = 12$.

VII - Montrer que l'ensemble $\{M(x+y,-x,-y)\}_{(x,y) \in R^2}$ est un sous anneau de X isomorphe à $\mathbf{C}$.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail